アクチュアリー試験の概要と対策

中央大学理工学部　藤田岳彦

OLIS お茶の水女子大学保険フォーラム

2014 年 11 月 22 日

アクチュアリー試験

- 数学
- 生保数理
- 損保数理
- 年金数理
- 会計・経済・投資理論

数学は

- 確率
- 統計
- モデリング

からなっている。　まず確率論と保険数理のあらましを見ていこう

確率とはどういうものか

確率とは　未来の価値を現在の価値に投影（射影）したものである．例えば，正しいサイコロを投げて　6 の目が出る確率が 1/6 という意味は，6 が出れば 1 もらい，　6 以外が出れば何ももらわないという契約 (金融商品，くじ，ギャンブル) の　現在 (サイコロを投げる前) の価値である．
また,「確率論」では，事象の確率　よりも　確率変数のほうが重要な対象であることに注意しておく．ここで，確率変数 X とは　不確実性 ω が決まれば，それに応じて金額 $X(\omega)$ がもらえるとしたもので，これも不確実性に基づく契約の 1 種と考えてよい．
不確実性全体の集合を　標本空間といい，Ω で表す．すると，確率変数とは，　標本空間 Ω を定義域とし，実数 $\mathbb{R}$ を値域とする関数 (ω が決まれば $X(\omega)$ が決まること) である．

確率変数の例

さいころの目の２乗　サイコロを投げて目の２乗　をもらう契約

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ = さいころの目

先物　(デリバティブ，株式派生商品)

満期時 T に株価 S_T − 受け渡し価格 K をもらう契約

$\Omega = S_T$

コールオプション　(デリバティブ，株式派生商品)

満期時 T に $\max(S_T - K, 0)$ をもらう契約

$\Omega = S_T$

定期保険　死亡時 T に　保険金 K をもらう契約

Ω = 寿命 T, この場合の T はすでに確率変数

生命の偶然性 (Life Contingency)

３連単　競馬のレースで１着，２着，３着をすべてあてるとお金がもらえる契約 (外れて人のお金から一定額（競馬の場合は 25%, 宝くじは 50%) を控除して当たった人に分配する方式、パリミューチュエル方式という。宝くじも同様である。)

Ω = 馬の順列

確率変数の価値としての期待値

$E(X)=$ 確率変数の期待値 (Expectation) は確率変数 X の価値を表す数値であり,
$E(X)=X$ のとる値 $\times$ その値をとる確率 の和 $=\sum kP(X=k)$
で定義される.
例　X=正しいサイコロの目　とすると,

X のとる値	1	2	3	4	5	6
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

このとき
$E(X)=1\times 1/6+2\times 1/6+\cdot 6\times 1/6=3\times(1+6)/6=7/2$ であり，正しいサイコロを投げたとき，その目そのものをもらう契約の現在価値は　7/2 が妥当であることがわかる.
また　さいころの目の 2 乗をもらう契約の現在価値
$=E(X^2)=1^2\times 1/6+2^2\times 1/6+\cdot 6^2\times 1/6=91/6$ であることがわかる.

しっぽ定理

さらに追求していくと　大数の法則より，これを無限回繰り返すと，1 回あたりの利得は　確率 1 で 7/2 になることがわかるからである．保険契約の価値は　このように多数性，独立性に立脚する大数の法則に基づいて決まり，デリバティブの価値は　また別の考え方（「無裁定性」) に基づくものであることに注意しておく．ここで　$P(X \geqq 1) = P(X = 1) + \cdot + P(X = 6) = 1, P(X \geqq 2) = P(X = 2) + \cdot + P(X = 6) = 5/6, P(X \geqq 3) = 4/6, P(X \geqq 4) = 3/6, P(X \geqq 5) = 2/6, P(X \geqq 6) = 1/6, P(X \geqq 7) = 0, \ldots$ で，これを加えると $P(X \geqq 1) + P(X \geqq 2) + \cdots + P(X \geqq 6) = 1 + 5/6 + 4/6 + 3/6 + 2/6 + 1/6 = 7/2 = E(X)$ であり，これは一般の成立する定理 (しっぽ定理) である．

(しっぽ確率定理)　$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$

年金とお金の現在価値

1 年後に　a もらう契約の現在価値$=a\frac{1}{1+i}=av$
ここで　i は年利率，v は割引率
n 年 1 ずつ預ける預金の現在価値
$=1\times v+1\times v^2+\cdot+1\times v^n=\frac{v-v^{n+1}}{1-v}=\frac{1}{i}(1-\frac{1}{(1+i)^n})$
計算例　月複利 0.3% で　2000 万円を借りると 360ヶ月ローンの毎月返済額は
$\frac{2000\text{ 万円}\times 0.003}{1-(\frac{1}{1.003})^{360}}\fallingdotseq 90930$ 円 となる．
ここで　$n\to\infty$ とする，　つまり　永久に 1 ずつもらう永久年金の現在価値は $1/i$ になることに注意しておく．(土地を貸すと一定ずつお金が入るのでこれは　土地の理論価格とも考えられる。)

保険の価値，価格

収支相等の原則によって計算する．つまり，保険会社の収入全体と支出全体が等しくなるように決めるのである．
n 年満期期定期保険では　A さんは　生存しているかぎり，毎年（毎月）保険会社に保険料 P 円を払い，また，A さんが　n 年以内に死亡したときは　保険会社は　遺族に保険金 S 円を払うとする．
$n = 1$ の場合　収支相等の原則より，
$Pl_x = v^{1/2} Sd_x$
となる．　ここで　$l_x =$ 生命表での x 才で生きている人の人数，
$d_x = x$ 才で生きているが　$x + 1$ 才で死ぬ人の人数
これより，

$$P = \frac{v^{1/2} d_x S}{l_x}$$

となる．ここで　$\frac{d_x}{l_x}$ は　x 才で生きている人が　$x + 1$ 才までに死ぬ確率であり，これも前に示した期待値計算になっていることに注意する。

アクチュアリー試験に現れる確率

- 確率変数と確率分布
  - 期待値、　分散、共分散
  - 離散確率分布
    - 2 項分布、ベルヌーイ分布
    - 幾何分布、ファーストサクセス分布
    - 負の二項分布
    - 離散一様分布
    - ポアソン分布
    - 超幾何分布
  - 連続確率分布
    - 積分の計算
    - ガンマ関数・ベータ関数
    - 一様分布
    - 指数分布
    - 正規分布
    - ガンマ分布・ベータ分布
    - χ 二乗分布,　t 分布、F 分布
  - 2 次元分布
    - 多項分布 (じゃんけん, さいころ)
    - 図形内（上）の一様分布
    - 多次元正規分布

- その他
  - 　高校の確率 (漸化式を用いて解く)
  - 計算に便利な公式

[高校の確率] の例題

例題

n 回サイコロを投げその和が 7 の倍数になる確率を求めよ.

解

求める確率を a_n とおくと $a_{n+1} = \frac{1}{6}(1 - a_n), a_1 = 0$ を解いて

$a_{n+1} - \frac{1}{7} = \frac{-1}{6}(a_n - \frac{1}{7})$ より $a_n = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}(\frac{-1}{6})^{n-1}$

例題

サイコロを何回も投げ 初めて「５６」と続けて出るまでの回数 $=T$ とするときの　$E(T)$

解

「５」が出て (リーチ状態）から「５６」が出るまでの階数$=S$ とおくと $T=\begin{cases}1+S & (5\text{ が出る（確率}\frac{1}{6})) \\ 1+T' & (5\text{ 以外が出る (確率}\frac{5}{6}))\end{cases}$

$$S=\begin{cases}1 & (6\text{ が出る（確率}\frac{1}{6})) \\ 1+S & (5\text{ が出る（確率}\frac{1}{6})) \\ 1+T'' & (5,6\text{ 以外が出る (確率}\frac{4}{6}))\end{cases}$$

期待値をとって

$E(T)=1+\frac{1}{6}E(S)+\frac{5}{6}E(T),\quad E(S)=1+\frac{1}{6}E(S)+\frac{2}{3}E(T)$

この連立方程式を解いて $E(T)=36$

便利な公式の例

公式

- $\displaystyle\sum_{初}^{末} 等比数列 = \frac{初項 - 末項 \times 公比}{1 - 公比}$

例 $\displaystyle\sum_{k=20}^{100} 3^{2k-1} = \frac{3^{39} - 3^{201}}{1 - 3^2}$

- $\displaystyle\int e^{-x} f(x)dx = -e^{-x}(f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots)$

例 $\int_2^\infty x^3 e^{-5x} dx = \frac{1}{5^4} \int_{10}^\infty u^3 e^{-u} du =$
$\frac{1}{5^4}[-(u^3 + 3u^2 + 6u + 6)e^{-u}]_{10}^\infty = \frac{1}{5^4}(1366)e^{-10}$

- $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = \Gamma(s)(= (s-1)! \quad (s = 自然数のとき))$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\displaystyle\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2s-1}\theta \cos^{2t-1}\theta d\theta$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{t-1}}{(1+u)^{s+t}} du = B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

例題

n 組の夫婦がいる。バラバラにダブルスを組むとき元の夫婦がペアになる組数を X, 混合ダブルスを組むとき元の夫婦がペアになる組数を　Y とする。
(1)$E(X)$　(2)$E(Y)$ を求めよ。
解
(1) $X_i = 1$　(i 番目の夫が元のペア), 0(元のペアでない) とおくと $E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2n-1}$ ゆえに
$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{n}{2n-1}$
(2) $Y_i = 1$　(i 番目の夫が元のペア), 0(元のペアでない) とおくと
　$E(Y_i) = P(Y_i = 1) = \frac{1}{n}$
ゆえに　$E(Y) = E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = \frac{n}{n} = 1$

参考文献

- 藤田岳彦著　弱点克服大学生の確率統計　東京図書
- 藤田岳彦著　確率統計モデリング問題集　日本アクチュアリー会